中3

3 次の各問いに答えなさい。 [各4点 計16点]

(1) $x+y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x^2-y^2=1$ のとき, xy の値を求めなさい。 [奈良・東大寺学園高]

(2) $x=\sqrt{6}+\sqrt{2}$, $y=\sqrt{6}-\sqrt{2}$ のとき, $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ の値を求めなさい。 [東京・城北高]

(3) $a=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $b=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ のとき, a^2+ab+b^2 の値は $\boxed{}$ である。$\boxed{}$ にあてはまる数を求めなさい。 [愛媛・愛光高]

(4) $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $b=\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $c=\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}$ のとき, $ab+bc+ca=\boxed{}$ である。$\boxed{}$ にあてはまる数を求めなさい。 [大阪星光学院高]

4 次の各問いに答えなさい。 [各5点 計20点]

(1) $\dfrac{\sqrt{0.52^2-0.2^2}}{0.4^2}$ の値を求めなさい。 [兵庫・関西学院高]

(2) m, n を自然数とする。$\sqrt{26^4-10^4}=m\sqrt{n}$ を満たすような最小の n の値を求めなさい。 [埼玉・早稲田大本庄高]

(3) $\sqrt{n^2+21}$ が整数となるような自然数 n をすべて求めなさい。 [東京・早稲田実業高]

(4) $\{(2\sqrt{502}+3\sqrt{223})^3+(2\sqrt{502}-3\sqrt{223})^3\}^2-\{(2\sqrt{502}+3\sqrt{223})^3-(2\sqrt{502}-3\sqrt{223})^3\}^2$ を計算すると, $\boxed{}$ となる。$\boxed{}$ にあてはまる数を求めなさい。 [兵庫・灘高]

5 $\boxed{}$ にあてはまる数を求めなさい。ただし, π は円周率とする。 [各3点 計9点]

(1) $\sqrt{(-4)^2}=\boxed{}$

(2) $\sqrt{(\pi-3)^2}=\boxed{}$

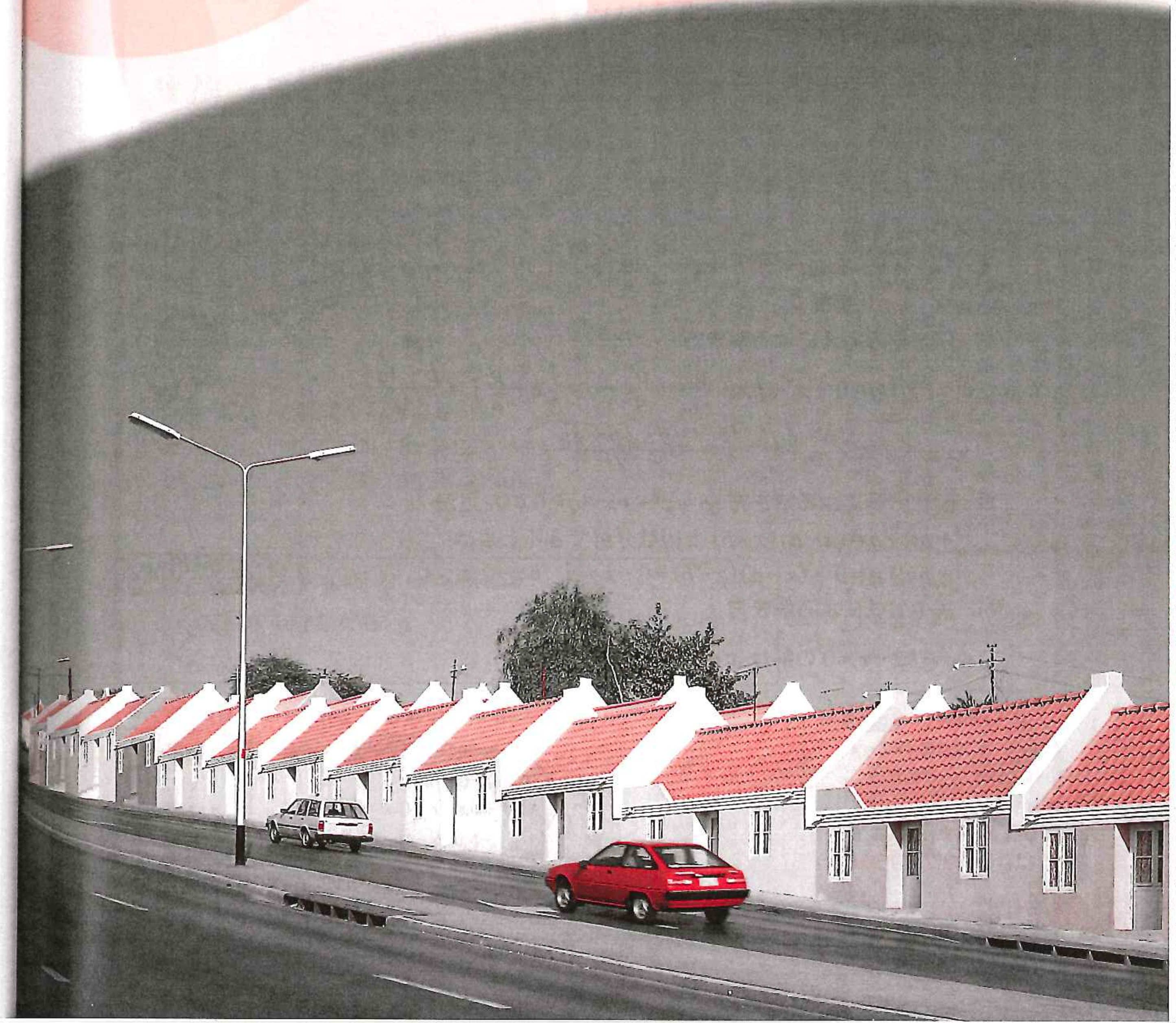
(3) $\sqrt{(\pi-5)^2}+\sqrt{(3-\pi)^2}=\boxed{}$ [千葉・渋谷教育学園幕張高]

6 $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$ の整数部分を a, 小数部分を b とするとき, 次の問いに答えなさい。 [各5点 計10点]

(1) $(\sqrt{3}-1)^3(\sqrt{3}+1)^3$ を計算せよ。

(2) $a^2+b^2+2a+2b-2$ の値を求めよ。 [東京・海城高]

3章 2次方程式



テスト前にも見なおそう

1 2次方程式

教科書のまとめ

1 2次方程式とその解

⇨ 例題63

□ 整理すると，(x の2次式)$=0$ の形になる方程式を，x についての **2次方程式**という。x についての2次方程式の一般の形は次のように書ける。

$ax^2+bx+c=0$ (a，b，c は定数，$a \neq 0$)

(例) $x^2-3=0$，$2x^2=5x$，$3x^2-x-4=0$

□ 2次方程式にあてはまる文字の値を，その方程式の**解**という。2次方程式の解をすべて求めることを，**2次方程式を解く**という。

2 2次方程式の解き方

⇨ 例題54～63

□ $ax^2=b$ を解く

$$ax^2=b \to x^2=\frac{b}{a} \to x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$$

□ $(x+a)^2=b$ を解く

$$(x+a)^2=b \to x+a=\pm\sqrt{b} \to x=-a\pm\sqrt{b}$$

□ $x^2+px+q=0$ を解く

(1) **平方根の考えによる解き方**

$$x^2+px+q=0 \to x^2+px+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}-q \to \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2-4q}{4}$$

$$\to x+\frac{p}{2}=\pm\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2} \to x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

(2) **因数分解による解き方**…… $x^2+px+q=0$ の左辺が

$x^2+px+q=(x-a)(x-b)$ と因数分解できるときは，

$$x^2+px+q=0 \to (x-a)(x-b)=0 \to x=a,\ b$$

(3) **解の公式による解き方**

$ax^2+bx+c=0$ の解は $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

平方根を考えると $x^2+px+\left(\dfrac{p}{2}\right)^2=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2$

$(x-a)(x-b)=0 \rightleftarrows x=a,\ b$
$ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$ の解は
$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

例題研究

基本例題で基礎をかためよう。標準例題，**発展例題**で実力をのばそう。

54 基本例題 $ax^2=b$ の解き方

次の方程式を解きなさい。

(1) $3x^2=9$　(2) $2x^2=16$　(3) $5x^2-12=0$

2次方程式
$ax^2=b$ の解は
$x=\pm\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

考え方 (1)　$3x^2=9$

両辺を3でわって　$x^2=3$

x は3の平方根だから　$x=\pm\sqrt{3}$ ……答

つまり，$ax^2=b$の形の2次方程式は，$x^2=p$ と変形して，$x=\pm\sqrt{p}$ とすればよい。

(2)　$2x^2=16$

両辺を2でわって　$x^2=8$

x は8の平方根だから　$x=\pm\sqrt{8}$

$\sqrt{\ }$ の中を簡単にして　$x=\pm2\sqrt{2}$ ……答

(3) 実際の答案では，次のようにすればよい。

$5x^2-12=0$

$5x^2=12$

$x^2=\dfrac{12}{5}$　$x=\pm\sqrt{\dfrac{12}{5}}$

$x=\pm\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$ ……答　← $\sqrt{\ }$ の中の平方因数を外に出し，分母に根号がない形にしておく。

コーチ $x=\pm\sqrt{3}$ とは，$x=\sqrt{3}$ または $x=-\sqrt{3}$ のことである。$x^2=3$ の解は，$\sqrt{3}$ と $-\sqrt{3}$ であるが，これを，$x=\sqrt{3}$，$-\sqrt{3}$ と書くこともある。また，このように，絶対値が等しく符号が異なる2数は，複号(p.56)を使って，$x=\pm\sqrt{3}$ と書くのがふつうである。

注意 解に根号がつく場合は，次のことに注意する。

1. 根号の中は，なるべく小さい整数にしておく。
$\sqrt{k^2a}=k\sqrt{a}\ (k>0)$

2. 分母に根号がついた数があるときは，根号をふくまない数にしておくとよい。
$\dfrac{a}{\sqrt{b}}=\dfrac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}}=\dfrac{a\sqrt{b}}{b}$

類題 64 次の方程式を解きなさい。

(1) $x^2=32$　(2) $3x^2=27$　(3) $2x^2=49$
(4) $x^2-24=0$　(5) $10x^2-81=0$

55 基本例題 $(x+a)^2=b$ の解き方

次の方程式を解きなさい。

(1) $(x-3)^2=16$　(2) $2(x+1)^2-5=0$

2次方程式
$(x+a)^2=b$ の解は
$x=-a\pm\sqrt{b}$

考え方 (1) ( )の中を X とおいてみる。

$x-3=X$ とおくと　$X^2=16$

$X=\pm4$ ←16の平方根は ±4

$X=x-3$ だから　$x-3=\pm4$

$x=3\pm4$

$x=3+4$ より　$x=7$　$x=3-4$ より　$x=-1$

よって　$x=7,\ -1$ ……答

コーチ $x=3\pm4$ とは，$x=3+4$ または $x=3-4$ のことである。これは，$x=7$ または，$x=-1$ と簡単にできるから，**$x=3\pm4$ で計算をやめてはいけない！**

3章 2次方程式

(2) 慣れてくれば，( )を1つのものと考えて次のように解く。

$$2(x+1)^2-5=0$$
$$2(x+1)^2=5$$
$$(x+1)^2=\frac{5}{2}$$ ← $\frac{5}{2}$ の平方根は $\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$
$$x+1=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$$ ←分母は有理化しておく
$$x+1=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$$
$$x=-1\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$$
$$x=\frac{-2\pm\sqrt{10}}{2}$$ ……答

注意 等号が縦に並ぶように書こう。
方程式の = が縦に並ぶように書くと，あとで見直すときに見やすい。
また，暗算でできるものを除いて，計算式は整理して書く。

参考 $x=\frac{-2\pm\sqrt{10}}{2}$ とは，「$x=\frac{-2+\sqrt{10}}{2}$ または $x=\frac{-2-\sqrt{10}}{2}$」のことである。

類題 65 次の方程式を解きなさい。

(1) $(x+2)^2=9$　(2) $(x-4)^2=72$

(3) $3(x+3)^2=12$　(4) $(2x-1)^2=50$

56 基本例題 完全平方式をつくる

次の式が完全平方式(かんぜんへいほうしき)であるためには，$\square$ の中がどんな数であればよいか。

(1) $x^2+3x+\square$　(2) $x^2-\frac{5}{2}x+\square$

$$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

考え方 和の平方公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ の右辺に注目すると，b^2 は a の係数 $(2b)$ の半分の平方になっている。

x^2+px
↓ $\left(\frac{p}{2}\right)^2$を加える
$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$

ポイント 〔完全平方式のつくり方〕

$$x^2+\underbrace{\boxed{p}}_{x\text{の係数の半分}}x+\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

コーチ 完全平方式…多項式の平方の形で表された式のこと。
(p.36「ミニ知識」)
平方完成…2次式に適当な数を加えて，完全平方式にすること。

(1) $x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$ だから　$\square=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$ ……答

(2) $x^2-\frac{5}{2}x+\left(-\frac{5}{4}\right)^2=\left(x-\frac{5}{4}\right)^2$ だから　$\square=\left(-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$ ……答

類題 66 次の式にどのような数を加えたら，完全平方式になりますか。

(1) x^2+10x　(2) x^2-3x　(3) $x^2+\frac{1}{2}x$

(4) x^2+6x+5　(5) x^2-x+1　(6) $x^2-\frac{4}{3}x-1$

57 基本例題 平方完成による解き方

次の方程式を平方完成(へいほうかんせい)の方法で解きなさい。

(1) $x^2-8x-20=0$　(2) $2x^2+7x-5=0$

2次方程式の**平方完成**による解き方

$x^2+px+q=0$
↓
$x^2+px=-q$
↓
$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2=-q+\left(\frac{p}{2}\right)^2$
↓
$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2-4q}{4}$
↓
$x+\frac{p}{2}=\pm\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}$
↓
$x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$

考え方 $x^2+px+q=0$ の形の方程式は，定数項を移項(いこう)して，両辺に x の係数の半分の平方を加え，**左辺を平方完成して解く。**

ポイント
①定数項を移項して $x^2+px=-q$ とする。
②左辺を平方完成して $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2-4q}{4}$ とする。
③ $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2-4q}{4}\to x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$

(1) $x^2-8x-20=0$ ←定数項 (-20) を移項する
$$x^2-8x=20$$
$$x^2-8x+16=20+16$$ ←両辺に $\left(-\frac{8}{2}\right)^2$ を加える
$$(x-4)^2=36$$
$$x-4=\pm\sqrt{36}$$
$$x-4=\pm6$$
$x=4+6$ または $x=4-6$　　よって，$x=10,\ -2$ ……答

(2) 両辺を2でわると，$x^2+px+q=0$ の形になる。
$2x^2+7x-5=0$ ←両辺を2でわる
$$x^2+\frac{7}{2}x-\frac{5}{2}=0$$
$$x^2+\frac{7}{2}x=\frac{5}{2}$$
$$x^2+\frac{7}{2}x+\frac{49}{16}=\frac{5}{2}+\frac{49}{16}$$ ←両辺に $\left(\frac{7}{4}\right)^2$ を加える
$$\left(x+\frac{7}{4}\right)^2=\frac{89}{16}$$
$$x+\frac{7}{4}=\pm\frac{\sqrt{89}}{4}$$
$$x=-\frac{7}{4}\pm\frac{\sqrt{89}}{4}$$　　$x=\frac{-7\pm\sqrt{89}}{4}$ ……答

コーチ **x^2の係数が1でない場合は，x^2 の係数で両辺をわっておく。**
$ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$ の両辺を a でわると
$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0\ (a\neq0)$
そこで，$p=\frac{b}{a}$，$q=\frac{c}{a}$ と考えれば，$x^2+px+q=0$ の形となり，上の方法が使える。このように p，q は分数でも小数でもよい。

注意 これまで調べてきたことから，**2次方程式の解は一般に2つあることがわかる。**また，$x^2+px+q=0$ で，$p^2-4q=0$ のときは解は1つだけである。なお，負の数の平方根というものは存在しないから，$\sqrt{\ }$ の中が負になる場合，つまり $p^2-4q<0$ のときは解は存在しない。このとき2次方程式の**解はない**という。

類題 67 次の方程式を平方完成の方法で解きなさい。

(1) $x^2+4x=3$　(2) $x^2-7x=-4$

(3) $x^2+8x+12=0$　(4) $x^2+x-12=0$

(5) $-x^2+5x+3=0$　(6) $x^2+0.1x-0.01=0$

(7) $x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}=0$　(8) $3x^2-5x+2=0$

グレードアップ さらに知識を広げよう 2次方程式の解の公式

○ 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ を平方完成の方法で解いてみよう

因数分解による解き方は，平方完成による解き方と比べると，計算がはるかに簡単であるが，2次方程式のうち，因数分解して解けるものは，特殊(とくしゅ)な形であるというのが難点である。

一般の2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c は定数，$a \neq 0$)
は，両辺を x^2 の係数 a でわると，$x^2+px+q=0$ の形になるから，平方完成の方法で解くことができる。

$ax^2+bx+c=0$		$2x^2+9x+5=0$
	両辺を x^2 の係数でわる	
$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$		$x^2+\frac{9}{2}x+\frac{5}{2}=0$
	定数項を移項する	
$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$		$x^2+\frac{9}{2}x=-\frac{5}{2}$
	両辺に(xの係数の半分)^{2}を加える	
$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$		$x^2+\frac{9}{2}x+\left(\frac{9}{4}\right)^2=-\frac{5}{2}+\left(\frac{9}{4}\right)^2$
	左辺を平方の形にする	
$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$		$\left(x+\frac{9}{4}\right)^2=-\frac{5}{2}+\frac{81}{16}$
	通分して右辺を計算する	
$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$		$\left(x+\frac{9}{4}\right)^2=\frac{81-40}{16}$
	平方根を求める	
$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$		$x+\frac{9}{4}=\pm\frac{\sqrt{41}}{4}$
	移項してまとめる	
$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$		$x=\frac{-9\pm\sqrt{41}}{4}$

○ 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の公式

上で求めた最後の式を，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の**解の公式**という。この形の2次方程式を解くのに，解の公式を使うと，いちいち平方完成しなくてすむ。

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の公式は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

58 基本例題 解の公式を使って解く

次の方程式を，解の公式を使って解きなさい。

(1) $x^2-4x-32=0$　　(2) $3x^2-11x+2=0$

(3) $x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}=0$

$ax^2+bx+c=0$ の解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

考え方 $ax^2+bx+c=0$ の解の公式は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

与えられた式から，a, b, c の値を読みとって，解の公式に代入していけばよい。

(1) $a=1$, $b=-4$, $c=-32$ の場合であるから

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times1\times(-32)}}{2\times1}$$
$$=\frac{4\pm\sqrt{144}}{2}=\frac{4\pm12}{2}$$

$\frac{4+12}{2}=8$, $\frac{4-12}{2}=-4$ だから　$x=8, -4$ ……答

(2) $a=3$, $b=-11$, $c=2$ の場合であるから

$$x=\frac{-(-11)\pm\sqrt{(-11)^2-4\times3\times2}}{2\times3}$$
$$=\frac{11\pm\sqrt{97}}{6}$$ ……答

(3) $a=1$, $b=\frac{1}{2}$, $c=-\frac{1}{6}$ とすると計算が大変! そこで，**分母の最小公倍数(さいしょうこうばいすう)6を両辺にかけて，分母を払い，係数を整数にする。**

$6x^2+3x-1=0$

となるから，$a=6$, $b=3$, $c=-1$ を代入すればよい。

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times6\times(-1)}}{2\times6}$$
$$=\frac{-3\pm\sqrt{33}}{12}$$ ……答

類題 68 次の方程式を，解の公式を使って解きなさい。

(1) $x^2-3x+1=0$　　(2) $x^2+4x-7=0$

(3) $2x^2-7x+3=0$　　(4) $0.2x^2-1.3x-0.7=0$

(5) $x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}=0$　　(6) $x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}=0$

コーチ
(1)は $(x-8)(x+4)=0$ と因数分解できるから，次ページのように**因数分解を使って解くほうが簡単**である。
($ax^2+bx+c=0$ で b^2-4ac が平方数となるときは，因数分解の方法で解くことができる。)

参考 b が偶数のとき，つまり $ax^2+2b'x+c=0$ の形の2次方程式の解は

$$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{-2b'\pm\sqrt{4(b'^2-ac)}}{2a}$$
$$=\frac{-2b'\pm2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}$$
$$=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

となる。これも公式として覚えておくと便利である。

ミニ知識 判別式

$ax^2+bx+c=0$ の解の個数は，b^2-4ac の符号によって判別できる。

$b^2-4ac>0$ のとき　解は2個
$b^2-4ac=0$ のとき　解は1個
$b^2-4ac<0$ のとき　解はなし

そこで，b^2-4ac を**判別式**という。

59 基本例題 $(x-a)(x-b)=0$ の解き方

次の方程式を解きなさい。

(1) $x(x-3)=0$　　(2) $(x-2)(x-3)=0$

(3) $(x+1)^2=0$

$(x-a)(x-b)=0$
$\rightarrow x=a,\ x=b$
とくに $(x-a)^2=0$
ならば　$x=a$

考え方 $ab=0$ が成り立つのは，次の3つの場合である。

①$a=0,\ b=0$　②$a=0,\ b\neq 0$　③$a\neq 0,\ b=0$

これを「または」ということばで表すと，次のようになる。

ポイント 「$ab=0$」ならば「$a=0$ または $b=0$」である。

(1) $x(x-3)=0$ だから，$x=0$ または $x-3=0$

よって　$x=0$ または $x=3$

$x=0,\ 3$ ……答

(2) $(x-2)(x-3)=0$ だから，$x-2=0$ または $x-3=0$

よって　$x=2$ または $x=3$

$x=2,\ 3$ ……答

(3) 上の「ポイント」で，a と b が等しいときだから

$(x+1)^2=0$　　$x+1=0$　　**$a^2=0$ ならば $a=0$**

よって　$x=-1$ ……答

コーチ $ab=0$ について
2数 a, b について，0であるかないかを考えると，次の4つの場合がある。

①$\begin{cases}a=0\\ b=0\end{cases}$　②$\begin{cases}a=0\\ b\neq 0\end{cases}$

③$\begin{cases}a\neq 0\\ b=0\end{cases}$　④$\begin{cases}a\neq 0\\ b\neq 0\end{cases}$

このうち，$ab=0$ となるのは a, b のうち少なくとも1つは0のとき，つまり「$a=0$ または $b=0$」のときである。

$$ab=0$$
$$\Updownarrow$$
$$a=0 \text{ または } b=0$$

類題 69 次の方程式を解きなさい。

(1) $x(x+6)=0$　　(2) $(x+1)(x-1)=0$

(3) $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2=0$　　(4) $4\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2=0$

60 標準例題 因数分解を用いる解き方①

次の方程式を，因数分解（いんすうぶんかい）を用いて解きなさい。

(1) $x^2-12x=0$　　(2) $2x^2-98=0$

因数分解して，
$ab=0$ の形に直す。

考え方 項が2つの場合であるが，左辺は因数分解できる。

(1) 共通因数をくくり出す。

$x^2-12x=0$

$\underline{x(x-12)}=0$ ←定数項のないものは，必ず x がくくり出せる

$x=0$ または $x-12=0$

ゆえに　$x=0$ または　$x=12$

$x=0,\ 12$ ……答

$x^2-12x=0$ の両辺を x でわって，$x-12=0$
よって　$x=12$
一見すると正しいようにも見えるが，これは誤り。x は0となることがあるから等式の両辺を文字 x でわってはいけない。

(2) 共通因数2をくくり出すと，(　)の中は平方の差である。

$2x^2-98=0$

$\underline{2(x^2-49)}=0$ ―両辺を2でわって　$x^2=49$
　　　　これから $x=\pm\sqrt{49}$ としても同じ

$2(x-7)(x+7)=0$

$x-7=0$　または　$x+7=0$

ゆえに　$x=7$　　　　$x=-7$

$x=\pm 7$ ……答

類題 70 次の方程式を因数分解を用いて解きなさい。

(1) $x^2+7x=0$　　(2) $x^2-0.3x=0$

(3) $x^2-25=0$　　(4) $2x^2-\dfrac{1}{8}=0$

コーチ 式を整理して，左辺が2項式となる場合は，
①$x^2+ax=0$
$\rightarrow x(x+a)=0$
$\rightarrow x=0,\ -a$
②$x^2-a^2=0$
$\rightarrow (x+a)(x-a)=0$
$\rightarrow x=\pm a$

61 標準例題 因数分解を用いる解き方②

次の方程式を，因数分解を用いて解きなさい。

(1) $x^2+6x+9=0$　　(2) $x^2-x-12=0$

(3) $3x^2-18x-48=0$

因数分解の公式を使って
$(x+a)(x+b)=0$
の形にする。

考え方 乗法公式などを利用して，左辺を因数分解する。

(1) $x^2+6x+9=0$ ←$9=\left(\dfrac{6}{2}\right)^2$ だから，平方公式を利用

$(x+3)^2=0$

ゆえに　$x+3=0$

$x=-3$ ……答 ←解は1つだけ

(2) $\underline{x^2-x-12}=0$ ―-4 と3の和は -1，積は -12

$(x-4)(x+3)=0$

ゆえに　$x-4=0$　または　$x+3=0$

$x=4$　または　$x=-3$

$x=4,\ -3$ ……答

(3) $3x^2-18x-48=0$ ←両辺を3でわる

$\underline{x^2-6x-16}=0$ ―-8 と2の和は -6，積は -16

$(x-8)(x+2)=0$

ゆえに　$x-8=0$　または　$x+2=0$

$x=8$　または　$x=-2$

$x=8,\ -2$ ……答

類題 71 次の方程式を解きなさい。

(1) $x^2-4x+4=0$　　(2) $x^2+20x+100=0$

(3) $4x^2-20x+25=0$　　(4) $x^2+5x+6=0$

(5) $x^2+7x-18=0$　　(6) $x^2-x-2=0$

コーチ 与えられた2次方程式を整理したとき，左辺が因数分解できる場合は，因数分解の方法で解くこと。その方が楽である。

参考 $x^2+px+q=0$ の形の方程式は，p^2-4q が平方数ならば，因数分解の方法で必ず解ける。
(証明) $p^2-4q=k^2$ (k は整数) とおくと

$$q=\frac{p^2-k^2}{4}$$

よって　x^2+px+q

$=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2-\left(\dfrac{k}{2}\right)^2$

$=\left(x+\dfrac{p+k}{2}\right)\left(x+\dfrac{p-k}{2}\right)$

となるから，方程式の左辺は因数分解できる。

ミニ知識 重解
2次方程式の解はふつう2つあるが，(1)のような $(x+a)^2=0$ の形の方程式は解が1つだけである。このような解を重解（じゅうかい）という。

62 発展例題 複雑な2次方程式の解き方①

次の2次方程式を解きなさい。

(1) $3(x-1)^2=2(x-2)(x-3)$　　(2) $\dfrac{(x+2)(x-6)}{3}=\dfrac{x(x-1)}{4}$

着眼 式が整理されていない2次方程式を解く問題である。このような場合は，乗法公式を使ったり，移項したりして，**$ax^2+bx+c=0$ の形に変形する**と解の公式による解き方や，因数分解を用いる解き方で解くことができる。

●2次方程式の解き方
①**$ax^2+bx+c=0$** の形に整理する。
②左辺が**因数分解**できるかどうか調べる。
③因数分解できなければ解の公式を使う。

解答

(1) $3(x-1)^2=2(x-2)(x-3)$

$3(x^2-2x+1)=2(x^2-5x+6)$

$3x^2-6x+3=2x^2-10x+12$ ←すべての項を一方の辺に集めて同類項を簡単にする

$x^2+4x-9=0$

$x=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times1\times(-9)}}{2\times1}$ ←解の公式を使う

$=\dfrac{-4\pm\sqrt{52}}{2}=\dfrac{-4\pm2\sqrt{13}}{2}=-2\pm\sqrt{13}$

よって　$x=-2\pm\sqrt{13}$ ……答

(2) $\dfrac{(x+2)(x-6)}{3}=\dfrac{x(x-1)}{4}$ ←まず分子を展開する。分母を先に払うと計算ミスが多くなる！

$\dfrac{x^2-4x-12}{3}=\dfrac{x^2-x}{4}$ ←両辺に12をかける

$4(x^2-4x-12)=3(x^2-x)$

$4x^2-16x-48=3x^2-3x$

$x^2-13x-48=0$ ←和が-13，積が-48だから $-16+3=-13$，$(-16)\times3=-48$

$(x-16)(x+3)=0$

$x-16=0$　または　$x+3=0$

$x=16$　または　$x=-3$

よって　$x=16,\ -3$ ……答

類題72 次の方程式を解きなさい。

(1) $(x+6)(x-6)=13$

(2) $(x+1)^2+(x-2)^2=8$

(3) $(x+10)^2=4(x+9)$

(4) $2(x+7)(x-1)=x^2$

(5) $2(x-5)(x+2)=(x-3)(x+3)$

(6) $\dfrac{(x+5)(x-2)}{5}=\dfrac{(x-3)(x+4)}{3}$

63 発展例題 複雑な2次方程式の解き方②

次の方程式を解きなさい。

(1) $(x-3)^2-2(x-3)-3=0$　　(2) $2(x^2-1)=(x-1)^2$

(3) $(2x+3)^2=(x-2)^2$

着眼 前ページのように（ ）をはずして $x^2+px+q=0$ の形に整理しても解けるが，いつもそうしないと解けないわけではない。式の形に着目して因数分解してみよう。

(1) **$x-3=X$ とおくと**，$X^2-2X-3=0$ となり，因数分解できる。

(2) 左辺$=2(x+1)(x-1)$だから，$x-1$ が共通因数。

(3) 移項して，$(2x+3)^2-(x-2)^2=0$ とすると，左辺は平方の差になっている。

[複雑な2次方程式]
式の形に着目して**因数分解の方法**をためしてみる。

解答

(1) $(x-3)^2-2(x-3)-3=0$

$x-3=X$ とおくと　$X^2-2X-3=0$　$X^2+(-3+1)X+(-3)\times1=0$

$(X-3)(X+1)=0$

よって　$X=3,\ -1$

$X=3$ のとき　$x-3=3$　　よって　$x=6$

$X=-1$ のとき　$x-3=-1$　　よって　$x=2$

ゆえに　$x=6,\ 2$ ……答

(2) $2(x^2-1)=(x-1)^2$

$2(x+1)(x-1)-(x-1)^2=0$ ←両辺を$(x-1)$でわってはいけない　←$x-1$ をくくり出す

$(x-1)\{2(x+1)-(x-1)\}=0$

$(x-1)(x+3)=0$

よって　$x=1,\ -3$ ……答

(3) $(2x+3)^2=(x-2)^2$

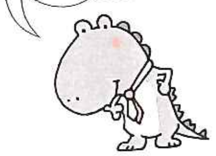
$(2x+3)^2-(x-2)^2=0$ ←$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$

$\{(2x+3)+(x-2)\}\{(2x+3)-(x-2)\}=0$

$(3x+1)(x+5)=0$

よって　$x=-\dfrac{1}{3},\ -5$ ……答

平方根の考えを使っても解ける。
$2x+3=\pm(x-2)$
$2x+3=x-2$ から
$x=-5$
$2x+3=-(x-2)$ から
$x=-\dfrac{1}{3}$



類題73 次の方程式を解きなさい。

(1) $(x-1)(x+1)=4(x+1)$　　(2) $(x-3)^2=3-x$

(3) $(x+2)(x-3)=3x+6$　　(4) $x^2=4(x-3)^2$

64 発展例題 1つの解がわかっている2次方程式

x についての2次方程式 $x^2-2px+p^2-2p+3=0$ の1つの解が3であるという。このとき，p の値と他の解を求めなさい。

着眼 与えられた方程式の解は p の式で表せるはずと考えて，解を p で表して，これが3に等しいとして，p を求めようとすると，手におえなくなる。…(※)
そこで，方程式の解というのは，**方程式を成り立たせる x の値**であることに着目して，与式に $x=3$ を代入してみよう。

解答
与えられた2次方程式に，$x=3$ を代入すると

$$3^2-2p\times3+p^2-2p+3=0$$
$$\underline{p^2-8p+12}=0$$ ←p についての2次方程式。和が -8，積が12となる2数は -2 と -6
$$(p-2)(p-6)=0$$
$$p=2,\ 6$$

p が決まれば方程式も決まり，2つの解が求められる。

i） $p=2$ を方程式に代入すると
$$x^2-2\times2x+2^2-2\times2+3=0$$
$$\underline{x^2-4x+3}=0$$ ←和が -4，積が3となる2数は -1 と -3
$$(x-1)(x-3)=0$$
$$x=1,\ 3$$

ii） $p=6$ を方程式に代入すると
$$x^2-2\times6x+6^2-2\times6+3=0$$
$$\underline{x^2-12x+27}=0$$ ←和が -12，積が27となる2数は -3 と -9
$$(x-3)(x-9)=0$$
$$x=3,\ 9$$

答 $\begin{cases}p=2\\ \text{他の解は } x=1\end{cases}$ または $\begin{cases}p=6\\ \text{他の解は } x=9\end{cases}$

●与えられた解を方程式に代入すると **p についての方程式**ができる。
●$x=a$ が
$x^2+px+q=0$ の解
↓
$a^2+pa+q=0$

再検討 直接 p を求めると…
(※)のように，与式の左辺を平方完成して，直接 p を求めてみる。
$$x^2-2px+p^2-2p+3=0$$
$$(x-p)^2-2p+3=0$$
$$(x-p)^2=2p-3$$
$$x=p\pm\sqrt{2p-3}$$
1つの解が3であるから，
$p+\sqrt{2p-3}=3$ または
$p-\sqrt{2p-3}=3$

ここまでくるとお手上げである。左の解法で解こう。

類題 74 $x^2+ax-48=0$ の1つの解が6のとき，a の値と他の解を求めなさい。

類題 75 $x^2-6x+a=0$ の1つの解が $3+\sqrt{5}$ のとき，a の値と他の解を求めなさい。

チェックテスト

1 次の方程式を解きなさい。
□(1) $x^2-25=0$ □(2) $x^2-36=0$ □(3) $x^2-7=0$
□(4) $2x^2=18$ □(5) $x^2-5=13$ □(6) $20x^2-8=2x^2$

2 次の方程式を解きなさい。
□(1) $(x-1)^2=9$ □(2) $(x+6)^2=49$ □(3) $3(x+8)^2=54$

3 次の方程式を解きなさい。
□(1) $x^2+2x=12$ □(2) $x^2-4x=20$ □(3) $x^2-14x-23=0$
□(4) $x^2+6x=4$ □(5) $x^2-x-3=0$ □(6) $x^2+x-4=0$

4 次の方程式を解きなさい。
□(1) $(x-5)(x-3)=0$ □(2) $(x-1)(x+4)=0$ □(3) $x^2-6x+8=0$
□(4) $x^2+x-20=0$ □(5) $16x^2-25=0$ □(6) $x^2-3x=0$

5 下の(ア)，(イ)で解き方が正しいか。正しくなければ正しい解を求めなさい。

□(ア) $2x^2-4x+2=0$ の解き方
両辺を2でわって
$x^2-2x+1=0$
因数分解して
$(x-1)^2=0$ $x-1=0$ $x=1$
答 $x=1$

□(イ) $x^2=8x$ の解き方
両辺を x でわって
$x=8$
答 $x=8$

3章 2次方程式

解答

1 (1) $x=\pm5$ (2) $x=\pm6$ (3) $x=\pm\sqrt{7}$ (4) $x=\pm3$ (5) $x=\pm3\sqrt{2}$ (6) $x=\pm\dfrac{2}{3}$
2 (1) $x=4,\ -2$ (2) $x=1,\ -13$ (3) $x=-8\pm3\sqrt{2}$
3 (1) $x=-1\pm\sqrt{13}$ (2) $x=2\pm2\sqrt{6}$ (3) $x=7\pm6\sqrt{2}$ (4) $x=-3\pm\sqrt{13}$
(5) $x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$ (6) $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$
4 (1) $x=5,\ 3$ (2) $x=1,\ -4$ (3) $x=2,\ 4$ (4) $x=-5,\ 4$ (5) $x=\pm\dfrac{5}{4}$ (6) $x=0,\ 3$
5 (ア)正しい。 (イ)正しくない。解 $x=0,\ 8$

定期テスト予想問題

解答 ⇒ 別冊 p.20

1 [2次方程式を解く]
次の方程式を解きなさい。

(1) $3(x-2)^2-36=0$　　(2) $2(5-x)(x+3)=0$
(3) $x^2+x=12$　　(4) $x^2-5x-14=0$
(5) $x^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}=0$　　(6) $2(x+1)^2=x(x+7)$
(7) $\frac{(x-2)(x-5)}{3}=\frac{(x-4)^2}{4}$　　(8) $(2x-2)(x-3)=(x+4)(x+5)$

2 [2次方程式の解①]
次の問いに答えなさい。

(1) $x^2-3x+1=0$ の解のうち，大きいほうを求めなさい。
(2) 2次方程式 $x^2-3x-18=0$ を満たす x の値のうちで，正の数を求めなさい。

3 [2次方程式の解②]
次の問いに答えなさい。

(1) 2次方程式 $x^2-ax-3a=0$ (a は定数) の1つの解が $x=6$ であるとき，もう1つの解を求めなさい。
(2) x についての2次方程式 $x^2+ax+b=0$ の2つの解が -3 と -1 であるとき，a と b の値を求めなさい。
(3) x についての2次方程式 $x^2-2ax+a^2-4=0$ の2つの解の差は4であり，また，大きいほうの解は小さいほうの解の5倍であるとき，2つの解および a の値を求めなさい。

4 [2次方程式の解③]
$x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ は，$\sqrt{2}x^2+\boxed{}\,x-\sqrt{2}=0$ の解である。
$\boxed{}$ の中にあてはまる数を求めなさい。

5 [2次方程式の解④]
次の2次方程式がただ1つの解をもつように，k の値を定めなさい。

(1) $x^2-kx+9=0$　　(2) $2x^2-3x+k=0$

ベストガイド

③ (2) $x=-3$ と $x=-1$ を代入すると，a，b についての連立方程式ができる。
(3) まず，2つの解を x_1，x_2 $(x_1>x_2)$ として，x_1，x_2 についての連立方程式をつくってみる。

④ $x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ を，与えられた方程式に代入する。

⑤ 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ において，$b^2-4ac=0$ のとき解は1つになる。

2 2次方程式の利用

教科書のまとめ

1 2次方程式の応用問題

⇨ 例題64～70

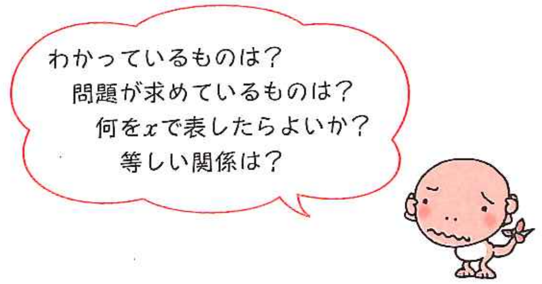
□ 2次方程式の応用問題を解く手順

① 問題文をよく読み，わかっているものは何か，問題が求めているものは何かをはっきりさせる。
② **何を x で表したらよいか**を決める。方程式をつくりやすいように決めること。求めるものを x にするとは限らない。そのとき，何を x とおいたかを明らかにしておくこと。
③ **等しい関係に着目して方程式をつくる。**このとき，両辺の単位はそろえておくこと。
④ **方程式を解く。**

$$\left.\begin{array}{l} x^2+px+q=0 \\ ax^2+bx+c=0 \end{array}\right\}\text{の形に整理して}$$

i)因数分解　　ii)解の公式
を利用して解を求める。
⑤ 求めるもの以外のものを x としたときは，問題の求めているものを計算する。
⑥ 解が問題に適するかどうかを検討して，答えを書く。2つの解について，それぞれ題意に適するかどうかを検討する。

(例) (1) 面積や道幅を求める問題では，答えが負になることはない。
(2) 三角形の辺に関する問題では，辺の長さは正である。また，2辺の長さの和は残りの1辺の長さよりも必ず大きい。



例題研究

基本例題で基礎をかためよう。標準例題，**発展例題**で実力をのばそう。

65 基本例題 数についての問題①

和が 11 で積が 8 となるような 2 つの数を求めなさい。

和が p，積が q である 2 つの数は **$x^2-px+q=0$ の解。**

考え方 和と積がわかっている 2 数を求める問題 である。何を x で表したらよいだろうか？

ポイント **どちらか一方の数を x とおいて，もう一方の数は，x を用いて表せばよい。**

和が 11 であるから，一方の数を x とすると，もう一方の数は，$11-x$ と表すことができる。この 2 つの積が 8 であるから

$x(11-x)=8$　　整理すると　$x^2-11x+8=0$

解を求めると　$x=\dfrac{11\pm\sqrt{89}}{2}$　← $x=\dfrac{-(-11)\pm\sqrt{(-11)^2-4\times1\times8}}{2\times1}$

ところで，2 つの解の和と積は，それぞれ

$\dfrac{11+\sqrt{89}}{2}+\dfrac{11-\sqrt{89}}{2}=11$，　$\dfrac{11+\sqrt{89}}{2}\times\dfrac{11-\sqrt{89}}{2}=\dfrac{121-89}{4}=8$

となるから問題に適する。

$\dfrac{11+\sqrt{89}}{2}$ と $\dfrac{11-\sqrt{89}}{2}$ ……答

←x は自分で決めたものだから，答えを $x=$……としてはいけない！

コーチ 2 つの数 a，b を解とする方程式は，$(x-a)(x-b)=0$ つまり **$x^2-(a+b)x+ab=0$** である。**$a+b=p$** (和) **$ab=q$** (積) とおけば，**$x^2-px+q=0$** となる。

参考 求める 2 つの数を x，y とすると

$\begin{cases} x+y=11 & \cdots① \\ xy=8 & \cdots② \end{cases}$

となる。これは連立 2 元 2 次方程式で中学校では学習しない。

類題 76 和が 9 で，積が -36 となるような 2 数を求めなさい。

類題 77 和が 4 で，積が 1 となるような 2 数を求めなさい。

66 基本例題 数についての問題②

ある正の数を 2 乗するところを，誤って 2 倍したため，答えが 63 小さくなった。正しい答えを求めなさい。

方程式がつくりやすいように，**変数を決める。**

考え方 もとの数を x とすると，「正しい答え」は x^2，誤って 2 倍した結果は $2x$ である。そこで，「$2x$ が x^2 より 63 だけ小さい」ことがわかる。これを方程式に表すと　$2x=x^2-63$

整理して　$x^2-2x-63=0$

$(x-9)(x+7)=0$　←$-2=(-9)+7$，$-63=(-9)\times7$

よって　$x=9$，-7

x は正の数だから，9 は適するが，-7 は不適。

正しい答えは　$x^2=9^2=81$　　81 ……答

コーチ 求めるものは「正しい答え」であるが，これを x とすると，もとの数は $\sqrt{x}$ となり，立式が難しくなり，解くのも困難になる。そこで，「考え方」のようにもとの数を x とする。

類題 78 ある数 x の 2 倍から 3 をひいた数と，その数 x に 1 を加えた数の積が 3 に等しいという。ある数 x を求めなさい。

類題 79 2 けたの正の整数があり，一の位の数は十の位の数の 2 倍で，各位の数の積はもとの整数より 16 小さいという。もとの整数を求めなさい。

67 標準例題 数についての問題③

1 から n までの整数の和は，次の式で求められる。

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

1 からいくつまでの和が 171 となりますか。

(1 から n までの和) $=171$ とおき，公式の n を求める。

考え方 1 から n までの和を 171 とすると，$\dfrac{n(n+1)}{2}=171$ が成り立つ。これは n についての 2 次方程式となっているから，これを解けばよい。分母を払って　$n(n+1)=342$

$n^2+n-342=0$　　$(n+19)(n-18)=0$　←$1=19+(-18)$，$-342=19\times(-18)$

$n=-19$，18

n は 1 以上でなければいけないから，求めた解のうち，18 は適するが，-19 は適さない。　　1 から 18 までの和 ……答

コーチ (例題の公式の証明)

$S=1+2+\cdots+(n-1)+n$

右辺の順序を逆にすると

$S=n+(n-1)+\cdots\cdots+2+1$

2 つの式の和を考えると

$2S=(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)$

$=n(n+1)$

よって　$S=\dfrac{n(n+1)}{2}$

ミニ知識 整数の和

(奇数の和)

$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

(偶数の和)

$2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$

類題 80 1 から n までの整数の和が 105 である。n はいくらですか。

68 基本例題 図形についての問題①

縦が横よりも 7 m 長く，面積が 78 m² の長方形の土地がある。この土地の縦と横の長さはそれぞれいくらですか。

横の長さを x m として，縦の長さを x を用いて表す。

考え方 横の長さを x m とすると，縦の長さは $(x+7)$ m だから

$x(x+7)=78$

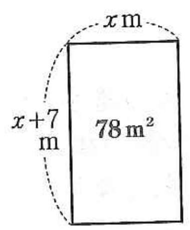
整理して　$x^2+7x-78=0$　　$(x-6)(x+13)=0$　←和が 7，積が -78

よって　$x=6$，-13

x は正の数だから，6 は適するが -13 は適さない。

横が 6 m のとき，縦は　$6+7=13$ (m)

縦 13 m，横 6 m ……答



図形についての問題では **(辺の長さ)>0** に注意！

コーチ 縦の長さを x m として解くこともできる。方程式は $x(x-7)=78$ で，解は $x=13$，-6　$x>7$ に注意すると，$x=-6$ は適さない。横は $13-7=6$ (m)

類題 81 正方形がある。その 1 辺を 2 cm 長くし，他の 1 辺を 4 cm 長くすると，面積は 3 倍になるという。もとの正方形の 1 辺の長さを求めなさい。

3章 2次方程式

69 発展例題 物体の投げ上げに関する問題

ボールを毎秒30 m の速さで真上に投げ上げると，t 秒後には，はじめの位置からおよそ $(30t-5t^2)$ m の高さにあるという。

(1) はじめの位置から40 m 高くなるのは，何秒後か求めなさい。

(2) ボールがはじめの位置にもどってくるのは，何秒後か求めなさい。

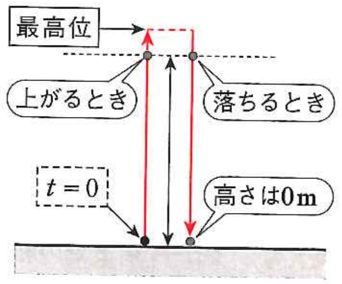
着眼 (1) t 秒後の高さを40 m とすれば

$30t-5t^2=40$

となる。

解が2つあれば，小さいほうが上がるとき，大きいほうが落ちるときである。

(2) 「ボールがはじめの位置にもどる」というのは，高さが0 m になることだから，**$30t-5t^2=0$** を解けばよい。



解答

(1) 高さを40 m とおいて

$$30t-5t^2=40$$

整理して　$-5t^2+30t-40=0$

両辺を -5 でわって　$t^2-6t+8=0$　←$-6=(-2)+(-4)$，$8=(-2)\times(-4)$

$$(t-2)(t-4)=0$$

よって　$t=2,\ 4$

t は正だから，どちらも適する。$t=2$ は上がるとき，$t=4$ は落ちるときである。

2秒後と4秒後 ……答

(2) 高さを0 m とおいて

$$30t-5t^2=0$$

両辺を -5 でわって　$t^2-6t=0$　← t をくくり出す

$$t(t-6)=0$$

よって　$t=0,\ 6$

t は正だから，$t=6$ は適するが，$t=0$ は適さない。← 出発の時刻である

6秒後 ……答

参考 ボールがもっとも高く上がったとき，その高さを am とすると，$30t-5t^2=a$ はただ1つの解をもつことになる。$5t^2-30t+a=0$ と整理すると，p.87の「ミニ知識」から，$(-30)^2-4\times5\times a=0$

したがって，$a=45$ のときである。このとき，$5t^2-30t+45=5(t-3)^2$ となるから，$t=3$ が解である。そこでボールがもっとも高く上がるのは3秒後で，そのときの高さは45m であることがわかる。

ミニ知識 落体の法則

物体が落ちる速さは重さに関係ないことを発見したのは，ガリレオ＝ガリレイである。彼がピサの斜塔から重さがちがう2つの球を落として，このことを示したのは有名な話である。それまでは，重いものは軽いものより速く落ちると考えられていた。その後も，彼は斜面を使って研究を重ね，物体の落ちる距離は時間の2乗に比例すること(**落体の法則**)を発見した。

類題82 地上から毎秒40 m の速さで真上に投げ上げた物体の，投げ上げてから t 秒後の高さ ym が $y=40t-5t^2$ で表されるとき，次の問いに答えなさい。

(1) 物体の高さが60 m となるのは，投げ上げてから何秒後ですか。

(2) 物体が地上に落ちるのは，投げ上げてから何秒後ですか。

70 発展例題 水溶液の濃度に関する問題

濃度8％の食塩水が，1.2kg 入っている容器がある。この容器から食塩水を何 g か取り出した後に，同量の水を加えてよくかき混ぜる。さらに，この容器から前と同量の食塩水を取り出した後に，同量の水を加えてよくかき混ぜた。最後に，この容器の食塩水の水分を完全に蒸発させて，残った食塩の量をはかったところ，54g あった。はじめに取り出した食塩水の量は何 g ですか。

着眼 取り出した食塩水の量を xg として，**残った食塩の量を x で表せばよい。**

[濃度についての問題]

溶けている物質の量に着目する

↓

(水溶液の量)×(濃度)

① はじめの食塩水中にふくまれていた食塩の量は　$1200\times0.08=96$ (g)

② はじめに取り出した食塩水の量を xg とすると，取り出した食塩の量は　$96\times\dfrac{x}{1200}$ (g)

だから，残った食塩の量は　$96\left(1-\dfrac{x}{1200}\right)$ (g)

③ 2回目に取り出した食塩の量は，

$96\left(1-\dfrac{x}{1200}\right)\times\dfrac{x}{1200}$ (g)だから，

2回目に残った食塩の量は

$$96\left(1-\frac{x}{1200}\right)\left(1-\frac{x}{1200}\right)$$

$$=96\left(1-\frac{x}{1200}\right)^2 \text{ (g)}$$

である。これが最後に残った食塩の量の54g に等しいことから，方程式をつくる。

解答

はじめに取り出した食塩水の量を xg とすると

$96\left(1-\dfrac{x}{1200}\right)^2=54$ ←( )をはずして展開すると計算が大変。

$$\left(1-\frac{x}{1200}\right)^2=\frac{54}{96}$$

$\left(1-\dfrac{x}{1200}\right)^2=\dfrac{9}{16}$ ←$(x+a)^2=b$ の形　p.83 例題55

$$1-\frac{x}{1200}=\pm\sqrt{\frac{9}{16}}$$

$1-\dfrac{x}{1200}=\pm\dfrac{3}{4}$ ←移項して両辺に1200をかける

$$x=1200\left(1\mp\frac{3}{4}\right)$$

よって　$x=1200\mp900$　(複号同順)

$x=1200-900=300$ または

$x=1200+900=2100$

$0<x<1200$ だから，300は適するが，2100は適さない。

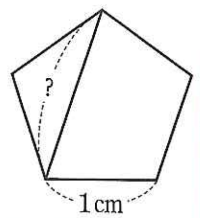
300g ……答

類題83 アルコール480g が入っている容器がある。その中からある重さのアルコールをくみ出して，その後に水を加えてもとの重さにし，次に前よりも40g 多くくみ出して，ふたたび水でこれを補ったところ，水とアルコールの重さの比は3：5になった。はじめにくみ出したアルコールの重さは何g ですか。

★この例題は5章相似な図形を学習してから学んでも構いません。

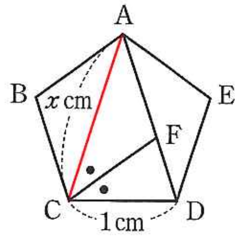
71 発展例題 図形についての問題②

1辺の長さが1 cmの正五角形の対角線の長さを求めなさい。



着眼 下の図のように，正五角形 ABCDE において，△ACD と △CFD の関係に目をつけてみよう。

解答



正五角形 ABCDE は3つの三角形

△ABC，△ACD，△ADE

に分けられるから

内角の和$=180°\times3=540°$

$\angle ABC=540°\div5=108°$

△ABC は二等辺三角形だから

$\angle ACB=(180°-108°)\div2=36°$

よって　$\angle ACD=108°-36°=72°$

△ACD は二等辺三角形だから

$\angle CAD=180°-72°\times2=36°$

∠ACD の二等分線 CF（F は二等分線と AD との交点）をひくと　$\angle FCD=72°\div2=36°$

△ACD と△CFD で　∠CAD=∠FCD

∠ADC=∠CDF（共通）

よって，AC=x cm とおくと，△ACD は △CFD を x 倍に拡大したものである。

したがって　xFD=CD

△CFD，△ACF はともに二等辺三角形だから

AF=CF=CD=1 cm　　FD=$x-1$ (cm)

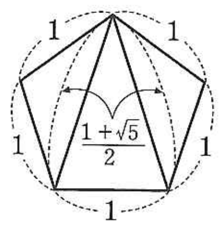
よって　$x(x-1)=1$　　$x^2-x-1=0$

x を求めると　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$x>0$だから　$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　　$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ cm ……答

参考 正五角形の作図のしかた

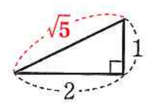
1辺の長さが1である正五角形の対角線の長さが $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ であることを用いると，正五角形を作図することができる。

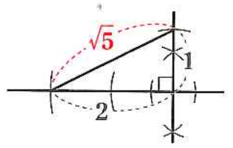


正五角形は右のような3つの二等辺三角形からできている。

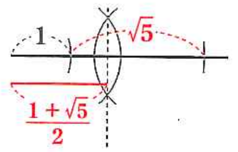
ゆえに $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ の長さがとれればよい。

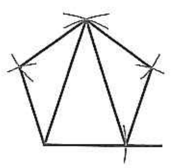
ここで，$\sqrt{5}$ は，右のような直角三角形の斜辺の長さ(→三平方の定理)だから，右のような直角三角形を作図すれば，$\sqrt{5}$ の長さをとれる。



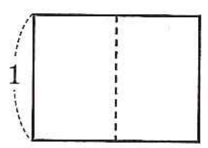


これから$1+\sqrt{5}$ の長さをとり，その半分の長さをとれば $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ の長さはとれる。あとは辺の長さから三角形3つをつくって，正五角形をつくればよい。





類題 84　右の図の長方形は，長い方の辺の中点を通る線で2等分すると，もとの長方形と同じ形になる。この長方形の2辺の比を求めなさい。



チェックテスト

1 次の各問いに答えなさい。

□(1) 差が3で，積が40になる2つの負の数を求めなさい。

□(2) 連続する3つの自然数がある。そのうちの最小の数と最大の数の積は，3つの数の和の2倍より1小さい。この3つの数を求めなさい。

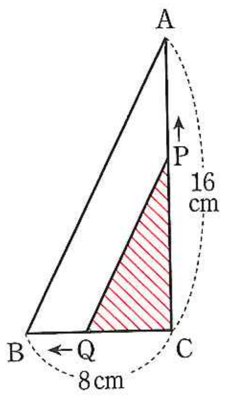
2 毎秒50 m の速さで物を真上に投げるとき，投げ上げてから x 秒後の高さを y m とすると，およそ $y=50x-5x^2$ の関係があるという。

このとき，次の問いに答えなさい。

□(1) 高さが80 m になるのは，投げ上げてから何秒後ですか。

□(2) 投げ上げた位置にもどってくるのは，投げ上げてから何秒後ですか。

3 右の図の直角三角形 ABC で，点 P，Q は頂点 C を同時に出発し，点 P は辺 CA 上を A まで毎秒 2 cm の速さで，点 Q は辺 CB 上を B まで毎秒 1 cm の速さで動くとする。点 P，Q が出発してから x 秒後の△PQC の面積を y cm² として，次の問いに答えなさい。ただし，$x=0$ のとき $y=0$ とする。



□(1) 点 P が C を出発してから x 秒後の CP の長さを，x を使って表しなさい。

□(2) y を x の式で表しなさい。

□(3) 点 P，Q が C を出発してから5秒後の△PQC の面積を求めなさい。

3章 2次方程式

解答

1 (1) −8 と −5　(2) 5，6，7

考え方 (1) 差は(大きい数)−(小さい数)のこと。　(2) 自然数を求めることをうっかり忘れないこと。

2 (1) 2秒後，8秒後　(2) 10秒後

考え方 (1) 地上から物を投げ上げると，物は必ず落下してくるので，同じ高さになるのは2度あることに注意。

(2) $0=50x-5x^2$ を解くことと同じ。

3 (1) $2x$cm　(2) $y=x^2$　(3) 25cm²

考え方 (1) 点 P の速さは毎秒 2 cm だから，x 秒後の CP の長さは $2x$cm である。

(3) $y=x^2$ の式で，$x=5$ を代入して y の値を求める。

定期テスト予想問題

解答 ⇒ 別冊 *p.21*

1 ［連続２整数］

連続した２つの整数の積が30であるとき，この２つの整数はいくらですか。

2 ［２けたの整数］

２けたの整数がある。一の位の数と十の位の数の和は６で，この整数と，一の位の数字と十の位の数字の順を逆にしてできる整数との積は1008であるという。

この２けたの整数を求めなさい。

3 ［円の半径］

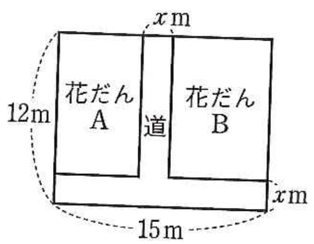
半径が6 cmの円がある。この円の半径を$(6+x)$cmとしたときの円の面積は，もとの円の面積より45π cm²広くなった。このxの値を求めなさい。

4 ［正方形の１辺の長さ］

正方形と長方形がある。長方形の縦は正方形の１辺より3 cm短く，横は4 cm長い。また，正方形の面積は長方形の面積の２倍に等しい。このとき，正方形の１辺の長さを求めなさい。

5 ［道の幅］

縦12 m，横15 mの長方形の土地に，右の図のように同じ幅の道をつけ，残りをA，B２つの部分に分けて花だんをつくりたい。Aの面積を50m²，Bの面積を80m²にするには，道の幅を何mにすればよいですか。



6 ［長方形の辺の長さの比］

同じ長さのひもがある。片方のひもで正方形Aをつくり，他方のひもで長方形Bをつくったところ，AとBの面積の比が7：5になったという。Bの２辺の長さの比を求めなさい。

7 ［対角線をもつ多角形］

n角形の対角線の数は$\frac{1}{2}n(n-3)$本である。対角線が77本ひけるのは何角形ですか。

ベストガイド

2 一の位の数をxとすると，十の位の数は$6-x$となる。

3 つくった方程式が$(x+a)^2=b$の形をしているときは展開しないで解く。

5 道の部分の面積を①xをふくんだ式と②xをふくまない式の２通りの方法で表してみる。$0<x<12$に注意。

6 ひもの長さを$4a$，Bのたての長さをaxとして，方程式をつくってみよう。

7 nは多角形の辺の数であるから，$n \geqq 3$に注意。

入試問題にチャレンジ 5

制限時間30分　得点

解答 ⇒ 別冊 *p.22*

1 次の２次方程式を解きなさい。 ［各7点　計42点］

(1) $x^2-12x+35=0$ ［茨城県］

(2) $(x-3)^2=5$ ［埼玉県］

(3) $(x+3)(x-1)=5x+7$ ［山形県］

(4) $(x+3)^2=8x+17$ ［岡山県］

(5) $3x^2-6x-9=0$ ［京都府］

(6) $(2x+5)^2=(x+1)^2$ ［東京・八王子東高］

2 次の各問いに答えなさい。 ［各9点　計18点］

(1) ２次方程式$x^2+ax+b=0$の解が$x=p$，２であり，$(x,\ y)=(2,\ -1)$は$3x+ay=13$を満たすとき，pの値を求めなさい。 ［大阪・近畿大附高］

(2) xの２次方程式$ax^2+x-6=0$は異符号の２つの解をもち，その解の絶対値の比は３：４である。このとき，$a=\boxed{}$である。 ［東京・明治大付明治高］

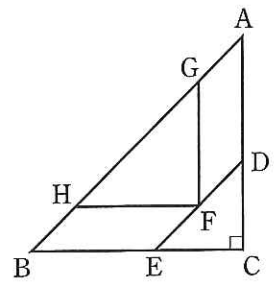
3 次の各問いに答えなさい。 ［各12点　計24点］

(1) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$という関係が成り立つとき，$\begin{vmatrix} x+2 & -x \\ -4 & x-3 \end{vmatrix}=-6$を満たす$x$の値を求めなさい。 ［千葉・日本大習志野高］

(2) 正の数xに対して〔x〕をその整数部分，{x}を小数部分とする。たとえば$x=3.14$のとき〔x〕=3，{x}=0.14である。

〔x〕^2-x{x}=0となるxのうち，$1<x<2$を満たすxを求めなさい。 ［奈良・東大寺学園高］

4 右の図のように，２つの直角二等辺三角形ABCとDECがあり，辺AC上に辺DC，辺BC上に辺ECがある。AC=BC=9 cmとする。辺DE上に点F，辺AB上に２点G，Hをとり，四角形GFDAとHBEFがともに平行四辺形になるようにする。四角形GFDAとHBEFの面積の和が△DECの面積の４倍になるとき，ADの長さは何cmになりますか。ADの長さをx cmとして方程式をつくり，求めなさい。



［16点］
［北海道］

3章 2次方程式

入試問題にチャレンジ 6

制限時間 50 分
解答 ⇒ 別冊 *p.23*

得点	

1 次の2次方程式を解きなさい。 [各4点 計16点]

(1) $(x+4)(x-4)=3x-6$ [秋田県]

(2) $(2x+1)(x-1)-(x+2)(x-1)=0$ [大分県]

(3) $\dfrac{(5x-2)^2-1}{2}-\dfrac{(5x+1)(5x-2)+2}{3}=\dfrac{3}{2}$ [東京・国立高]

(4) $(x+100)^2=2x+199$ [千葉・東邦大付東邦高]

2 次の各問いに答えなさい。 [各5点 計20点]

(1) 連立方程式 $\begin{cases} 2(x+y)-3xy=13 \\ (x+y)+2xy=-4 \end{cases}$ を解きなさい。ただし，$x<y$ とする。 [東京・海城高]

(2) 連立方程式 $\begin{cases} x^2+xy+y^2=1 \\ \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=3 \end{cases}$ を解きなさい。 [千葉・渋谷教育学園幕張高]

(3) 次の方程式を解きなさい。

(ア) $x^2+(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})x+\sqrt{6}-\sqrt{2}=0$

(イ) $\begin{cases} x^2+y^2=29 \\ x+y=3 \end{cases}$ [神奈川・慶應高]

3 次の各問いに答えなさい。 [各5点 計10点]

(1) x の2次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解が1，2のとき，x の2次方程式 $x^2+bx+a=0$ を解きなさい。 [東京・専修大附高]

(2) x の2次方程式 $x^2-4ax+a^2+12=0$ が $x=2$ を解にもつとき，a の値およびもう1つの解を求めなさい。 [東京・戸山高]

4 2つの自然数 m，n について $(\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt{2}-1)$ が自然数になるとき，$m:n=$ $\boxed{(1)}$ または $\boxed{(2)}$ である。また，$(\sqrt{x^2-7}+\sqrt{7x-10})(\sqrt{2}-1)$ が自然数となる自然数 x は $\boxed{(3)}$ と $\boxed{(4)}$ である。$\boxed{}$ にあてはまる数や比を求めなさい。 [各5点 計20点]

[東京・開成高]

5 次の各問いに答えなさい。 [各4点 計12点]

(1) 大小2つの長方形の花だんがある。小さい花だんのまわりの長さは28mで，縦は横よりも短い。大きい花だんの縦と横の長さは，小さい花だんの縦と横の長さよりそれぞれ2mずつ長い。大きい花だんの面積は，小さい花だんの面積の2倍より13m² 小さい。このとき，小さい花だんの縦の長さを求めなさい。 [福島県]

(2) 連続する3つの正の整数がある。大きいほうの2つの数の積から，もっとも小さい数の2倍をひいたら74になった。3つの整数を求めなさい。 [千葉・和洋国府台女子高]

(3) ある円の半径を3cmのばした円は，もとの円より面積が50％増加した。このとき，もとの円の半径は $\boxed{}$ cmである。$\boxed{}$ にあてはまる数を求めなさい。 [東京・成城高]

6 定価の x ％引きで販売すると売り上げ個数が $2x$ ％増える商品がある。ただし，$0<x<100$ とする。 [各5点 計10点]

(1) 売り上げの総額が定価で販売したときと等しくなるのは，何％引きで販売したときですか。

(2) 売り上げの総額が定価で販売したときより8％増加するためには，何％引きで販売すればよいですか。 [長崎・青雲高]

7 $\angle A=90°$，AB=10，AC=8 の△ABCがあり，辺BC，CA，AB上に(両端の頂点を除く)それぞれ点D，E，Fがある。BD：DC=2：3で，2つの三角形△BDFと△CEDの面積が等しい。AF=x，AE=y とおくとき，次の問いに答えなさい。 [各6点 計12点]

(1) △BDFの面積を x で，△CEDの面積を y でそれぞれ表し，y を x の式で表しなさい。

(2) さらに，2つの三角形△BDFと△DEFの面積も等しいとき，x の値を求めなさい。 [兵庫・白陵高]

特集! 数の拡張の話(虚数(きょすう)の話)

2次方程式は，判別式を用いれば解の個数がわかる。

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は，x^2 の係数 a が0でないとき

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

という解の公式を用いれば，いつでも解けることがわかった。ところが，p.87の「ミニ知識」に，b^2-4ac をこの2次方程式の判別式(はんべつしき)といい，

i）$b^2-4ac>0$ のとき，解は2個
ii）$b^2-4ac=0$ のとき，解は1個
iii）$b^2-4ac<0$ のとき，解はなし

と書いてある。この iii)について深く考えてみよう。

解をもたない2次方程式を解いてみる。

2次方程式 $x^2+x+1=0$ を，解の公式を使って解きなさい。

(考え方) $a=1$, $b=1$, $c=1$ の場合であるから，解の公式に代入して解く。

(解答)
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times1}}{2\times1}$$
$$=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

どんな数も2乗して負にならないから，$\sqrt{-3}$ という数はない。

(答) 解はない

ガウス
〈ドイツ〉
1777〜1855

幼い頃から才能を示し，大学の卒業時には正17角形の作図法を発見。1801年には「数論研究」を著す。物理学・天文学にも優れた功績を残し，その名は磁束密度の単位名にもなっている。

実数とは，有理数と無理数をあわせたもの。

数直線上の点で表せる数をすべてまとめて，実数という。

実数には，整数(正，0，負のいずれでもよい) m と，自然数(正の整数) n とを用いて $\frac{m}{n}$ という形に表せる有理数と，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，π，…などのような無理数とがある。実数の2乗については

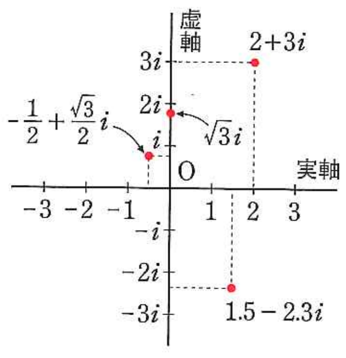
i）$0^2=0$
ii）$a\neq0$ のときは $a^2>0$

という性質があって負にはならない。

2乗して負になる数を考えてみよう。

小学校では3−5のような数は考えられなかったが，中学校にはいって，これを負の数として考え，−2と表した。

18世紀のドイツの数学者ガウスは，2乗して −1になる数を考えて，これを i という文字で表し，虚数単位(きょすうたんい)とよんだ。そして，数直線のゼロでこれに直交する直線をとって，その上の点で表した。実数と虚数をあわせた数を複素数(ふくそすう)とよび，下のように平面上の点で表すことができる。



4章 関数 $y=ax^2$

中3

3章　2次方程式

類 題

● 本冊 p.83～92

64 (1) $x=\pm4\sqrt{2}$　(2) $x=\pm3$
(3) $x=\pm\frac{7\sqrt{2}}{2}$　(4) $x=\pm2\sqrt{6}$　(5) $x=\pm\frac{9\sqrt{10}}{10}$

65 (1) $x=1,\ -5$　(2) $x=4\pm6\sqrt{2}$
(3) $x=-1,\ -5$　(4) $x=\frac{1\pm5\sqrt{2}}{2}$

66 (1) 25　(2) $\frac{9}{4}$　(3) $\frac{1}{16}$　(4) 4
(5) $-\frac{3}{4}$　(6) $\frac{13}{9}$

67 (1) $x=-2\pm\sqrt{7}$　(2) $x=\frac{7\pm\sqrt{33}}{2}$
(3) $x=-2,\ -6$　(4) $x=3,\ -4$
(5) $x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$　(6) $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{20}$
(7) $x=\frac{-3\pm\sqrt{57}}{12}$　(8) $x=1,\ \frac{2}{3}$

68 (1) $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$　(2) $x=-2\pm\sqrt{11}$
(3) $x=3,\ \frac{1}{2}$　(4) $x=7,\ -\frac{1}{2}$
(5) $x=\frac{-2\pm\sqrt{22}}{6}$　(6) $x=\frac{2}{3},\ -\frac{1}{2}$

69 (1) $x=0,\ -6$　(2) $x=\pm1$
(3) $x=\frac{1}{2}$　(4) $x=-\frac{2}{3}$

70 (1) $x=0,\ -7$　(2) $x=0,\ 0.3$
(3) $x=\pm5$　(4) $x=\pm\frac{1}{4}$

71 (1) $x=2$　(2) $x=-10$
(3) $x=\frac{5}{2}$　(4) $x=-2,\ -3$
(5) $x=-9,\ 2$　(6) $x=2,\ -1$

72 (1) $x=\pm7$　(2) $x=\frac{1\pm\sqrt{7}}{2}$
(3) $x=-8$　(4) $x=-6\pm5\sqrt{2}$
(5) $x=3\pm2\sqrt{5}$　(6) $x=5,\ -3$

73 (1) $x=-1,\ 5$　(2) $x=3,\ 2$
(3) $x=-2,\ 6$　(4) $x=2,\ 6$

74 $a=2$，他の解は $x=-8$

75 $a=4$，他の解は $x=3-\sqrt{5}$

定期テスト予想問題

● 本冊 p.94

1 (1) $x=2\pm2\sqrt{3}$　(2) $x=5,\ -3$
(3) $x=-4,\ 3$　(4) $x=-2,\ 7$
(5) $x=-\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}$　(6) $x=1,\ 2$
(7) $x=2\pm2\sqrt{3}$　(8) $x=\frac{17\pm\sqrt{345}}{2}$

解説　(1) $3(x-2)^2=36$　$(x-2)^2=12$
$x-2=\pm\sqrt{12}$　$x=2\pm2\sqrt{3}$
(2) $5-x=0$ または $x+3=0$ より
$x=5$ または $x=-3$
(3) $x^2+x-12=0$ として因数分解する。
(4)(5) は因数分解を利用する。
(6)～(8) はまず $x^2+px+q=0$ の形に整理する。
(6) $x^2-3x+2=0$ となり，因数分解を利用する。
(7) $x^2-4x-8=0$ となり，解の公式を用いる。
(8) $x^2-17x-14=0$ となり，解の公式を用いる。

2 (1) $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$　(2) $x=6$

解説　(2) 左辺を因数分解して，
$(x-6)(x+3)=0$　$x>0$ であるから　$x=6$

3 (1) $x=-2$　(2) $a=4,\ b=3$
(3) 2 つの解は $x=5,\ 1$ で，a の値は 3

解説　(1) $x^2-ax-3a=0$ に $x=6$ を代入して
a の値を求めると $a=4$ になる。したがって，
$x^2-4x-12=0$ を解けばよい。
(2) $x^2+ax+b=0$ に $x=-3$，$x=-1$ を代入すると
$9-3a+b=0$，$1-a+b=0$
この連立方程式を解くと $a=4$，$b=3$ となる。
(3) 2 つの解を x_1，x_2 $(x_1>x_2)$ とすると
$x_1-x_2=4$，$x_1=5x_2$
これらから，$x_1=5$，$x_2=1$ となる。
$x^2-2ax+a^2-4=0$ に $x=5$ を代入して解くと
$a=3$ または 7 となり，$x=1$ を代入して解くと
$a=-1$ または 3 となる。したがって　$a=3$

4 4

解説　$\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+\boxed{\quad}(\sqrt{3}-\sqrt{2})-\sqrt{2}=0$
$\sqrt{2}(5-2\sqrt{6})+\boxed{\quad}(\sqrt{3}-\sqrt{2})-\sqrt{2}=0$
$\boxed{\quad}(\sqrt{3}-\sqrt{2})=4(\sqrt{3}-\sqrt{2})$
ゆえに　$\boxed{\quad}=4$

5 (1) $k=\pm6$　(2) $k=\frac{9}{8}$

解説　(1) 解の公式の根号の内部が 0 のとき，
解はただ 1 つになるから
$k^2-36=0$　ゆえに　$k=\pm6$
(2)(1) と同様にして
$9-8k=0$　$k=\frac{9}{8}$

類 題

● 本冊 p.96～100

76 12 と -3

解説　一方の数をxとして，方程式に表すと
$x(9-x)=-36$

77 $2+\sqrt{3}$ と $2-\sqrt{3}$

解説　一方の数をxとして，方程式に表すと
$x(4-x)=1$

78 $x=2,\ -\frac{3}{2}$

解説　方程式に表すと　$(2x-3)(x+1)=3$

79 24 と 48

解説　もとの整数の十の位の数を x として，
方程式に表すと　$2x^2=12x-16$

80 $n=14$

解説　$\frac{n(n+1)}{2}=105$ より　$n=14,\ -15$
-15 は適さない。

81 4cm

解説　もとの正方形の 1 辺の長さを $x$cm とすると
$(x+2)(x+4)=3x^2$
これを整理すると　$x^2-3x-4=0$
これを解いて $x=4,\ -1$　$x=-1$ は適さない。

82 (1) 2 秒後と 6 秒後　(2) 8 秒後

解説　(1) $40t-5t^2=60$ を解く。
(2) $40t-5t^2=0$ を解く。$t=0$ は適さない。

83 80g

解説　はじめにくみ出したアルコールの量を xg とすると，2 回目にくみ出したアルコールの量は
$(x+40)\times\frac{480-x}{480}$(g) だから，残っているアルコールの量は
$480-x-(x+40)\times\frac{480-x}{480}=\frac{(480-x)(440-x)}{480}$

これが $480\times\frac{5}{3+5}=300$(g) だから
$(480-x)(440-x)=144000$
これを解くと $x=840,\ 80$ で，840 は適さない。

84 $1:\sqrt{2}$

解説　この長方形の長い方の辺を x とすると，
$\frac{x}{2}$ を x 倍したものが 1 になる。
よって　$\frac{x^2}{2}=1$
これを解くと　$x=\pm\sqrt{2}$
$x>0$ であるから，$x=-\sqrt{2}$ は適さない。

定期テスト予想問題

● 本冊 p.102

1 $(-6,\ -5)$ または $(5,\ 6)$

解説　小さいほうを x とすると，大きいほうは
$x+1$ だから，題意より　$x(x+1)=30$
これを解くと　$x=-6,\ 5$

2 24 と 42

解説　一の位の数を x とすると，十の位の数は
$6-x$ となり，題意より
$\{10(6-x)+x\}\{10x+(6-x)\}=1008$
これを整理すると $x^2-6x+8=0$ となり
$x=2,\ 4$

3 $x=3$

解説　題意より　$\pi(6+x)^2=36\pi+45\pi$
$(6+x)^2=81$
ゆえに　$x=-15,\ 3$
$x>0$ だから，$x=-15$ は不適。

4 4cm

解説　正方形の 1 辺の長さを $x$cm とすると，
長方形の縦は $(x-3)$cm，横は $(x+4)$cm となる。
題意より　$x^2=2(x-3)(x+4)$
これを解くと　$x=-6,\ 4$
$x>0$ だから $x=-6$ は不適。

5 2m

解説　道の部分の面積は $15x+12x-x^2$ (m²)
と表せる。また，題意より，道の面積は
$12\times15-50-80=50$ (m²)
だから $x^2-27x+50=0$ となる。
これを解くと　$x=25,\ 2$
$0<x<12$ だから $x=2$ となる。

6　$(7+\sqrt{14}):(7-\sqrt{14})$

解説　ひもの長さを $4a$，長方形 B の縦の長さを ax とすると，横の長さは $2a-ax$ となる。
題意より $a^2:ax(2a-ax)=7:5$ だから
$7ax(2a-ax)=5a^2$
整理すると　$7x^2-14x+5=0$
これを解くと　$x=\dfrac{7\pm\sqrt{14}}{7}$
このとき，長方形 B の縦の長さは $\dfrac{7\pm\sqrt{14}}{7}a$，
横の長さは $\dfrac{7\mp\sqrt{14}}{7}a$（複号同順）となり，2 辺の比は $(7+\sqrt{14}):(7-\sqrt{14})$ である。

7　十四角形

解説　題意より　$\dfrac{1}{2}n(n-3)=77$
これを解くと，$n=-11$ または 14
$n\geqq3$ だから $n=14$

入試問題にチャレンジ 5

● 本冊 p.103

1　(1) $x=5,\ 7$　(2) $x=3\pm\sqrt{5}$　(3) $x=-2,\ 5$
(4) $x=-2,\ 4$　(5) $x=-1,\ 3$　(6) $x=-2,\ -4$

解説　(1) $x^2-12x+35=0$
$x^2+\{(-5)+(-7)\}x+(-5)\times(-7)=0$
$(x-5)(x-7)=0$　$x=5,\ 7$
(2) $(x-3)^2=5$　$x-3=\pm\sqrt{5}$　$x=3\pm\sqrt{5}$
(3) $(x+3)(x-1)=5x+7$　$x^2+2x-3=5x+7$
$x^2-3x-10=0$　$(x+2)(x-5)=0$　$x=-2,\ 5$
(4) $(x+3)^2=8x+17$　$x^2+6x+9=8x+17$
$x^2-2x-8=0$　$(x+2)(x-4)=0$　$x=-2,\ 4$
(5) $3x^2-6x-9=0$　$x^2-2x-3=0$
$(x+1)(x-3)=0$　$x=-1,\ 3$
(6) $(2x+5)^2=(x+1)^2$　$(2x+5)^2-(x+1)^2=0$
$\{(2x+5)+(x+1)\}\{(2x+5)-(x+1)\}=0$
$(3x+6)(x+4)=0$　$3(x+2)(x+4)=0$
$x=-2,\ -4$

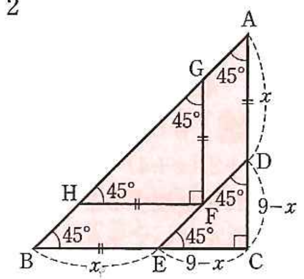
2　(1) $p=5$　(2) 2

解説　(1) 2 解が $x=p$，2 より，もとの方程式は
$(x-p)(x-2)=0$
展開して　$x^2-(p+2)x+2p=0$
よって，$a=-(p+2)$，$b=2p$ である。
$(x,\ y)=(2,\ -1)$ を $3x+ay=13$ に代入して
$6-a=13$　よって　$a=-7$
$-7=-(p+2)$ より　$p=5$，$b=10$
(2) 2 解を $x=k$，$-\dfrac{4}{3}k\ (k\neq0)$ とおくと，もとの方程式は　$(x-k)\left(x+\dfrac{4}{3}k\right)=0$
展開して　$x^2+\dfrac{1}{3}kx-\dfrac{4}{3}k^2=0$
両辺を 3 倍して　$3x^2+kx-4k^2=0$
2 項目の x の係数を 1 にするために，両辺を k でわって　$\dfrac{3}{k}x^2+x-4k=0$
これは，$ax^2+x-6=0$ と等しいので　$4k=6$
よって　$k=\dfrac{3}{2}$　$a=\dfrac{3}{k}=3\times\dfrac{2}{3}=2$

3　(1) $x=0,\ 5$　(2) $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

解説　(1) $\begin{vmatrix} x+2 & -x \\ -4 & x-3 \end{vmatrix}$
$=(x+2)(x-3)-(-x)\times(-4)=-6$
$x^2-x-6-4x=-6$　$x^2-5x=0$
$x(x-5)=0$　$x=0,\ 5$
(2) $1<x<2$ より，$[x]=1$，$\{x\}=x-1$ である。
$[x]^2-x\{x\}=0$ に代入して　$1-x(x-1)=0$
$1-x^2+x=0$　$x^2-x-1=0$
解の公式に代入して
$x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4\times1\times(-1)}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$
$1<x<2$ より　$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

4　6cm



解説　AD//GF より
同位角は等しいので
∠FGH=∠DAG=45°
BE//HF より同位角は等しいので
∠FHG=∠EBH=45°
よって，△GHF は直角二等辺三角形である。
AD$=x$ とおくと，題意より
△ABC=5△DEC+△GHF であるから
$9\times9\times\dfrac{1}{2}=5\times\dfrac{(9-x)^2}{2}+\dfrac{x^2}{2}$
整理して
$x^2+5(9-x)^2=81$　$x^2+405-90x+5x^2=81$
$6x^2-90x+324=0$　$x^2-15x+54=0$
$(x-6)(x-9)=0$　$x=6,\ 9$
$0<x<9$ であるから　$x=6$

入試問題にチャレンジ 6

● 本冊 p.104～105

1　(1) $x=-2,\ 5$　(2) $x=1$　(3) $x=0,\ 2$
(4) $x=-99$

解説　(1) $(x+4)(x-4)=3x-6$　$x^2-3x-10=0$
$(x+2)(x-5)=0$　$x=-2,\ 5$
(2) $(2x+1)(x-1)-(x+2)(x-1)=0$
$\{(2x+1)-(x+2)\}(x-1)=0$
$(x-1)^2=0$　$x=1$
(3) $\dfrac{(5x-2)^2-1}{2}-\dfrac{(5x+1)(5x-2)+2}{3}=\dfrac{3}{2}$
両辺に 6 をかけて
$3\{(5x-2)^2-1\}-2\{(5x+1)(5x-2)+2\}=9$
$3(25x^2-20x+4-1)-2(25x^2-5x-2+2)=9$
$3(25x^2-20x+3)-2(25x^2-5x)=9$
$75x^2-60x+9-50x^2+10x=9$
$25x^2-50x=0$　$25x(x-2)=0$　$x=0,\ 2$
(4) $(x+100)^2=2x+199$
$x^2+200x+10000=2x+199$
$x^2+198x+9801=0$　$(x+99)^2=0$　$x=-99$

2　(1) $x=-1,\ y=3$　(2) $x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$，
$y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$，または $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$，$y=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$，
または $x=\dfrac{-\sqrt{5}+1}{4}$，$y=\dfrac{-\sqrt{5}-1}{4}$，
または $x=\dfrac{-\sqrt{5}-1}{4}$，$y=\dfrac{-\sqrt{5}+1}{4}$
(3) (ア) $x=\sqrt{2},\ \sqrt{3}-1$
(イ) $x=-2,\ y=5$，または $x=5,\ y=-2$

解説　(1) $\begin{cases} 2(x+y)-3xy=13 & \cdots① \\ (x+y)+2xy=-4 & \cdots② \end{cases}$
$x+y=a$，$xy=b$ とおいて，①，②に代入すると
$\begin{cases} 2a-3b=13 \\ a+2b=-4 \end{cases}$　これを解いて　$\begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}$
よって　$\begin{cases} x+y=2 & \cdots③ \\ xy=-3 & \cdots④ \end{cases}$
③より　$y=2-x$
これを④に代入して
$x(2-x)=-3$　$x^2-2x-3=0$
$(x+1)(x-3)=0$　$x=-1,\ 3$
$x=-1$ のとき $y=3$，$x=3$ のとき $y=-1$
$x<y$ より　$x=-1$，$y=3$
(2) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=1 & \cdots① \\ \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=3 & \cdots② \end{cases}$
②より　$y^2+x^2=3xy$　$x^2-3xy+y^2=0$　$\cdots②'$
①−②′　$4xy=1$　$xy=\dfrac{1}{4}$　$\cdots③$
①より　$x^2+2xy+y^2=1+xy$　$(x+y)^2=\dfrac{5}{4}$
よって　$x+y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$
ゆえに　$y=-x+\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　$\cdots④$　$y=-x-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　$\cdots⑤$
④を③に代入して
$x\left(-x+\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$　$4x^2-2\sqrt{5}x+1=0$
$x=\dfrac{2\sqrt{5}\pm\sqrt{20-16}}{8}=\dfrac{2\sqrt{5}\pm2}{8}=\dfrac{\sqrt{5}\pm1}{4}$
よって　$(x,\ y)=\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{4},\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$，$\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4},\ \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$
⑤を③に代入して
$x\left(-x-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$
$4x^2+2\sqrt{5}x+1=0$
$x=\dfrac{-2\sqrt{5}\pm\sqrt{20-16}}{8}=\dfrac{-2\sqrt{5}\pm2}{8}=\dfrac{-\sqrt{5}\pm1}{4}$
よって　$(x,\ y)=\left(\dfrac{-\sqrt{5}+1}{4},\ \dfrac{-\sqrt{5}-1}{4}\right)$，$\left(\dfrac{-\sqrt{5}-1}{4},\ \dfrac{-\sqrt{5}+1}{4}\right)$
(3) (ア) $x^2+(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})x+\sqrt{6}-\sqrt{2}=0$
$\sqrt{6}-\sqrt{2}=\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)=-\sqrt{2}(1-\sqrt{3})$ であるから，
上記の 2 次方程式は次のようにかきかえられる。
$(x-\sqrt{2})\{x+(1-\sqrt{3})\}=0$　$x=\sqrt{2},\ \sqrt{3}-1$
(イ) $\begin{cases} x^2+y^2=29 & \cdots① \\ x+y=3 & \cdots② \end{cases}$
②より　$y=3-x$
これを①に代入して
$x^2+(3-x)^2=29$　$2x^2-6x-20=0$
$x^2-3x-10=0$　$(x+2)(x-5)=0$　$x=-2,\ 5$
$x=-2$ のとき $y=5$，$x=5$ のとき，$y=-2$

3　(1) $x=1,\ -3$　(2) $a=4$，もう 1 つの解 $x=14$

解説　(1) 2 解が $x=1$，2 であるから，もとの方程式は　$(x-1)(x-2)=0$

展開して　$x^2-3x+2=0$

これは，$x^2+ax+b=0$ と等しいので

$a=-3$，$b=2$

よって，$x^2+bx+a=0$ に代入して　$x^2+2x-3=0$

$(x-1)(x+3)=0$　　$x=1$，-3

(2) $x^2-4ax+a^2+12=0$ に $x=2$ を代入して

$4-8a+a^2+12=0$　　$a^2-8a+16=0$

$(a-4)^2=0$

よって　$a=4$

$x^2-4ax+a^2+12=0$ に $a=4$ を代入して

$x^2-16x+28=0$　　$(x-2)(x-14)=0$

$x=2$，14

よって，もう 1 つの解は　$x=14$

4　(1) **1：2**　(2) **2：1**　((1)，(2)は交換可)

(3) **4**　(4) **13**　((3)，(4)は交換可)

解説　$(\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt{2}-1)=N$ とおく。

両辺に $(\sqrt{2}+1)$ をかけると

$(\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=(\sqrt{2}+1)N$

$\sqrt{m}+\sqrt{n}=\sqrt{2N^2}+\sqrt{N^2}$

等式が成り立つのは，$m=2N^2$，$n=N^2$ または

$m=N^2$，$n=2N^2$ のときであるから，

$m:n=2:1$　または　$1:2$

$(\sqrt{x^2-7}+\sqrt{7x-10})(\sqrt{2}-1)$ が自然数となるのは

$(x^2-7):(7x-10)=2:1$　…①

または

$(x^2-7):(7x-10)=1:2$　…②

のとき。

ただし，x は $x^2-7>0$，$7x-10>0$ を満たす自然数

であるから　$x>3$　…③

①より　$x^2-7=2(7x-10)$　　$x^2-14x+13=0$

$(x-1)(x-13)=0$　　$x=1$，13

③より　$x=13$

②より　$2x^2-14=7x-10$　　$2x^2-7x-4=0$

$x=\dfrac{7\pm\sqrt{49+32}}{4}=\dfrac{7\pm9}{4}=-\dfrac{1}{2}$，$4$

③より　$x=4$

以上より　$x=4$，13

5　(1) **5m**　(2) **8，9，10**　(3) $\boldsymbol{6+3\sqrt{6}}$

解説　(1) 小さい花だんの縦の長さを xm とすると，

横の長さは $(14-x)$m になる。

ここで，縦は横より短いから　$x<7$

題意より　$(x+2)(14-x+2)=2x(14-x)-13$

整理して　$x^2-14x+45=0$

$(x-5)(x-9)=0$　　$x=5$，9

$x<7$ より　$x=5$

(2) 連続する 3 つの正の整数を $x-1$，x，$x+1$（ここで $x\geqq2$）とすると，題意より

$x(x+1)-2(x-1)=74$

整理して　$x^2-x-72=0$

$(x+8)(x-9)=0$　　$x=-8$，9

$x\geqq2$ より　$x=9$

3 数は　8，9，10

(3) もとの円の半径を $x$cm とおくと，題意より

$(x+3)^2\times\pi=x^2\times\pi\times1.5$

$(x+3)^2=1.5x^2$　　$x^2+6x+9=1.5x^2$

$2x^2+12x+18=3x^2$　　$x^2-12x-18=0$

解の公式に代入して

$x=\dfrac{12\pm\sqrt{12^2-4\times1\times(-18)}}{2}=\dfrac{12\pm\sqrt{216}}{2}$

$=\dfrac{12\pm6\sqrt{6}}{2}=6\pm3\sqrt{6}$

$x>0$ より　$x=6+3\sqrt{6}$

6　(1) **50% 引き**

(2) **10% 引き，または，40%引き**

解説　(1) 定価 a 円で b 個売り上げたときの売り上げの総額は　ab (円)

定価の x %引きで売ったときの売り上げの総額は，

$\left(1-\dfrac{x}{100}\right)a\times\left(1+\dfrac{2x}{100}\right)b$

$=\left(1-\dfrac{x}{100}\right)\left(1+\dfrac{2x}{100}\right)ab$ (円)

よって，$\left(1-\dfrac{x}{100}\right)\left(1+\dfrac{2x}{100}\right)ab=ab$ より

$\left(1-\dfrac{x}{100}\right)\left(1+\dfrac{2x}{100}\right)=1$

$1+\dfrac{2x}{100}-\dfrac{x}{100}-\dfrac{2x^2}{10000}=1$

$\dfrac{x}{100}-\dfrac{2x^2}{10000}=0$　　$100x-2x^2=0$

$x^2-50x=0$　　$x(x-50)=0$　　$x=0$，50

よって，50%引きにしたとき。

(2) (1)と同様に考えて，題意より

$\left(1-\dfrac{x}{100}\right)\left(1+\dfrac{2x}{100}\right)ab=\left(1+\dfrac{8}{100}\right)ab$

$\left(1-\dfrac{x}{100}\right)\left(1+\dfrac{2x}{100}\right)=1+\dfrac{8}{100}$

$1+\dfrac{x}{100}-\dfrac{2x^2}{10000}=\dfrac{108}{100}$

$\dfrac{2x^2}{10000}-\dfrac{x}{100}+\dfrac{8}{100}=0$

$2x^2-100x+800=0$　　$x^2-50x+400=0$

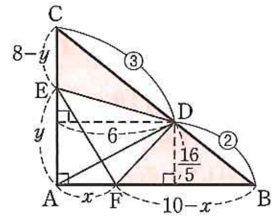
$(x-10)(x-40)=0$　　$x=10$，40

よって，10% 引きかまたは 40% 引きにしたとき。

7　(1) $\triangle\mathbf{BDF}=\dfrac{\mathbf{80-8}\boldsymbol{x}}{\mathbf{5}}$，$\triangle\mathbf{CED}=\mathbf{24-3}\boldsymbol{y}$，

$\boldsymbol{y}=\dfrac{\mathbf{8}\boldsymbol{x}\mathbf{+40}}{\mathbf{15}}$　　(2) $\boldsymbol{x}\mathbf{=3}$

解説　(1) D から AB にひいた垂線の長さは AC の長さの $\dfrac{2}{5}$ なので　$\dfrac{16}{5}$



よって

$\triangle BDF=(10-x)\times\dfrac{16}{5}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{8(10-x)}{5}=\dfrac{80-8x}{5}$

D から AC に下ろした垂線の長さは

AB の $\dfrac{3}{5}$ なので　6

よって　$\triangle CED=(8-y)\times6\times\dfrac{1}{2}=24-3y$

$\triangle BDF=\triangle CED$ より　$\dfrac{80-8x}{5}=24-3y$

$80-8x=120-15y$　　$15y=8x+40$

$y=\dfrac{8x+40}{15}$

(2) $\triangle ABC=10\times8\times\dfrac{1}{2}=40$

$\triangle AFE=x\times y\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}xy$

よって　$40-\dfrac{1}{2}xy=\dfrac{80-8x}{5}\times3$

この式に $y=\dfrac{8x+40}{15}$ を代入して

$40-\dfrac{x(8x+40)}{30}=\dfrac{240-24x}{5}$

$1200-x(8x+40)=6(240-24x)$

$1200-8x^2-40x=1440-144x$

$8x^2-104x+240=0$　　$x^2-13x+30=0$

$(x-3)(x-10)=0$　　$x=3$，10

$0<x<10$ より　$x=3$

入試ではココがねらわれる

▶ 2 次方程式の解法パターンは決まっているので，正しい手順を踏みさえすれば解答できる。

▶応用問題もいくつかの有名なパターンを身につければ，入試の会場で戸惑うことも少ない。

▶得点源となる単元であるから，しっかり解法を身につけておこう。